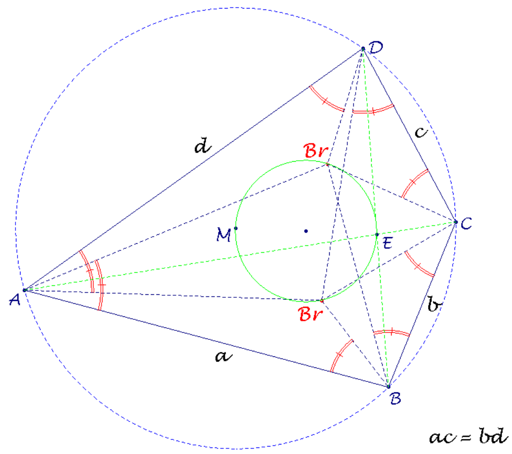
Sehnenvierecke mit Brocard-Punkten

Eckart Schmidt

Sehnenvierecke, die in den Summen ihrer Gegenseiten übereinstimmen $(a+c=b+d)$, *sind Sehnen-Tangenten-Vierecke. Sehnenvierecke mit produktgleichen Gegenseitenpaaren* $(a \cdot c = b \cdot d)$ *werden bei R. A. Johnson [1] als „harmonic quadrangles“ angesprochen, da sie sich als perspektive Bilder von Quadraten im gleichen Umkreis konstruieren lassen. Diese speziellen Sehnenvierecke besitzen zwei Brocard-Punkte in einer Verallgemeinerung der Brocard-Geometrie von Dreiecken. Das Konstruktionsprinzip lässt sich verallgemeinern für Sehnen-n-Ecke mit Brocard-Punkten. – Gearbeitet wird in kartesischen Koordinaten, wenn auch PC-gestützt, wobei die Berechnungen weitgehend unterdrückt werden.*



Brocard-Geometrie des Dreiecks

Aus dem Beziehungsreichtum der Brocard-Geometrie des Dreiecks seien hier einige Zusammenhänge angesprochen, die bei den Sehnenvierecken wieder aufgegriffen werden. Die Brocard-Punkte B_r eines Dreiecks sind zwei isogonale Punkte im Innern des Dreiecks, die von den Seiten als Standlinien rechtsseitig bzw. linksseitig unter dem gleichen Erhebungswinkel – dem Brocard-Winkel ω – gesehen werden. Dabei gilt ([1], S.265)

$$\cot\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta} = \cot A + \cot B + \cot C\,.$$

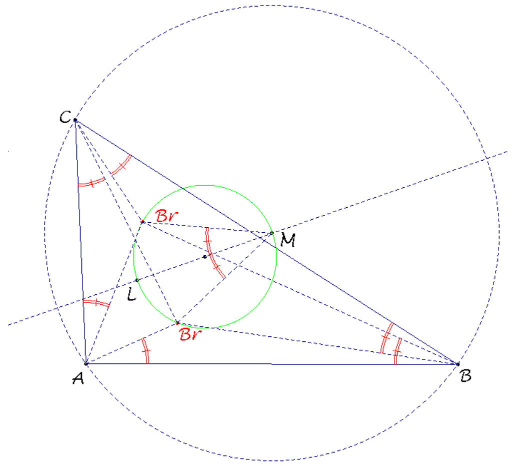
Bezeichnet man einen Kreis durch zwei Punkte X und Y und einer Tangente g mit $k(X,Y,g)$, so schneiden sich die Kreise

$$k(A,B,CA),\quad k(B,C,AB),\quad k(C,A,BC)$$

$$\text{bzw.}\quad k(A,C,BA),\quad k(B,A,CB),\quad k(C,B,AC)$$

jeweils in einem der Brocard-Punkte. Auf der Brocard-Achse, der Mittelsenkrechten der Brocard-Punkte, liegen die Umkreismitte M und der Lemoine-Punkt L; ML ist der Durchmesser des Brocard-Kreises, der die Brocard-Punkte B_r enthält. Dabei gilt

$$\angle LMB_r = \pm\omega .$$

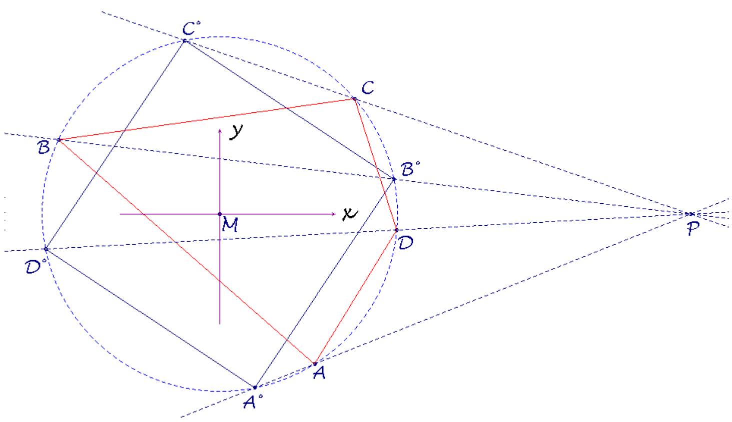


Ein Konstruktionsprinzip

Hier wird eine Konstruktionsmöglichkeit ([1], S.100) für Sehnenvierecke mit Brocard-Punkten angesprochen, die analog für Dreiecke gilt und abschließend für Sehnen-n-Ecke mit Brocard-Punkten verallgemeinert wird. Dazu werden die perspektiven Bilder $ABCD$ von Quadraten $A°B°C°D°$ in einem Kreis betrachtet. Gibt man dem Perspektivzentrum die Koordinaten $P(p;0)$ in einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Ursprung im Mittelpunkt M eines Kreises vom Radius r liegt, dann errechnet sich das perspektive Bild einer Quadratecke $A°(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$ auf dem Kreis zu

$$A\,\left(\frac{r(2pr-(p^2+r^2)\cos\varphi)}{p^2+r^2-2pr\,\cos\varphi};\frac{r(p^2-r^2)\sin\varphi}{p^2+r^2-2pr\,\cos\varphi}\right).$$

Die weiteren Ecken dieses quadrat-perspektiven Sehnenvierecks $ABCD$ erhält man dann zu den Winkeln $\varphi+90°, \varphi+180°, \varphi+270°$.



Johnson [1] spricht von „harmonic quadrangles" und erwähnt den folgenden Satz:

> **Satz 1 (Johnson): Ein Sehnenviereck ist genau dann perspektiv zu einem Quadrat in seinem Umkreis, wenn die Produkte der Gegenseiten gleich sind *(a · c = b · d).***

Beweis: Die Seitenlänge $a = AB$ eines quadrat-perspektiven Sehnenvierecks errechnet sich zu

$$a = \frac{\sqrt{2}r\left|p^2 - r^2\right|}{\sqrt{(p^2 + r^2 - 2pr\cos\varphi)(p^2 + r^2 + 2pr\sin\varphi)}},$$

entsprechend erhält man *b, c, d* . Damit ergibt sich zwanglos

$$ac = \frac{2r^2(p^2 - r^2)^2}{\sqrt{p^8 + r^8 - 2p^4r^4\cos(4\varphi)}} = bd\,.$$

Die Umkehrung, dass ein Sehnenviereck mit gleichen Gegenseitenprodukten quadrat-perspektiv ist, gestaltet sich – auch computergestützt – aufwändig und sei hier nur angedeutet: Wählt man für ein Sehnenviereck *ABCD* mit dem Flächeninhalt Δ auf dem Strahl vom Mittelpunkt des Umkreises in Richtung des Diagonalenschnitts ein Perspektivzentrum im Abstand

$$p = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4\Delta}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4\Delta}}\; r,$$

so lässt sich unter der Voraussetzung $a{\cdot}c = b{\cdot}d$ die Quadrateigenschaft des perspektiven Sehnenvierecks $A°B°C°D°$ zeigen. Die Wahl des Abstandes *p* wird erst aus dem folgenden Abschnitt verständlich. □

Quadrat-perspektive Sehnenvierecke

Zu festem Perspektivzentrum *P* werden die quadrat-perspektiven Sehnenvierecke eines Kreises betrachtet. Diese zeichnen sich aus durch einen gemeinsamen Diagonalenschnitt

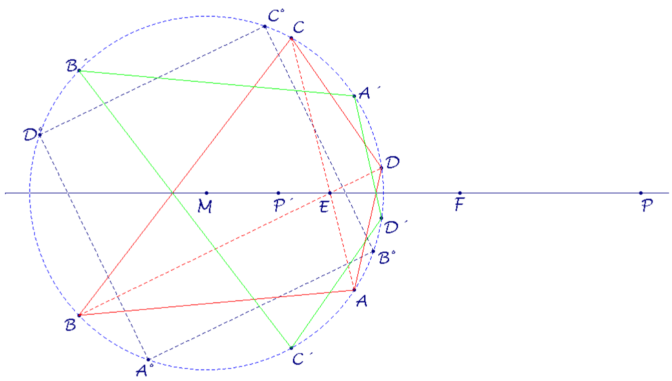
$$E(\frac{2pr^2}{p^2 + r^2};0).$$

> **Satz 2. Die quadrat-perspektiven Sehnenvierecke eines Kreises haben bei festem Perspektivzentrum den gleichen Diagonalenschnitt.**

Weiterhin haben die zugehörigen vollständigen Vierseite einen gemeinsamen Steiner-Punkt (auch Miquel-Punkt genannt)

$$F(\frac{p^2 + r^2}{2p};0),$$

der im Spiegelpunkt des Diagonalenschnitts am Umkreis liegt.



Spiegelt man das Perspektivzentrum P am Umkreis, so erhält man einen Punkt $P´$, der als Perspektivzentrum das an MP gespiegelte quadrat-perspektive Viereck $A´B´C´D´$ liefert. Die Perspektivzentren P und $P´$ liegen harmonisch zu der Umkreismitte M und dem Diagonalenschnitt E; der Steiner-Punkt F ist der Mittelpunkt von P und $P´$. Weiterhin liegen die quadrat-perspektiven Vierecke $ABCD$ und $C´D´A´B´$ perspektiv bzgl. des Steiner-Punktes F.
Bemerkenswerter ist der folgende Satz:

Satz 3. Zu festem Perspektivzentrum haben die quadrat-perspektiven Sehnenvierecke eines Kreises eine gemeinsame Berührellipse.

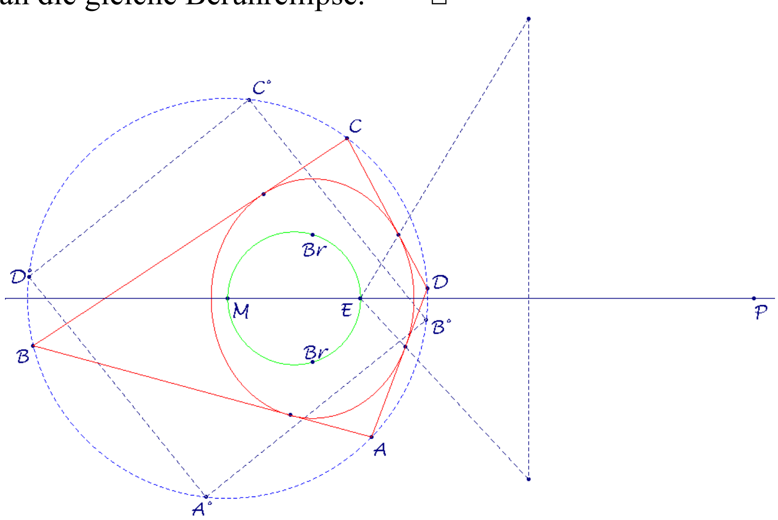
Beweis: Die Seitengerade AB eines quadrat-perspektiven Sehnenvierecks hat die Gleichung

$$(2pr+(p^2+r^2)(\sin\varphi-\cos\varphi))x+(p^2-r^2)(\sin\varphi+\cos\varphi)y$$
$$=r(p^2+r^2+2pr(\sin\varphi-\cos\varphi))$$

Die Einhüllende dieser Geraden liefert – unabhängig von der gewählten Seitengeraden – eine Berührellipse mit der Gleichung

$$\frac{\left(x-\dfrac{pr^2(p^2+r^2)}{p^4+r^4}\right)^2}{\dfrac{r^2(p^2-r^2)^4}{2(p^4+r^4)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{r^2(p^2-r^2)^2}{2(p^4+r^4)}}=1 .$$

Für das am Umkreis gespiegelte Perspektivzentrum P´ erhält man die gleiche Berührellipse. □



Das Diagonaldreieck eines quadrat-perspektiven Sehnenvierecks ist selbst-polar zu Umkreis und Berührkegelschnitt. Daher liegen die Berührpunkte in den Schnitten des Vierecks mit den Seitengeraden seines Diagonaldreiecks.
Von weiterem Interesse sind die Brennpunkte dieser gemeinsamen Berührellipse.

Satz 4. Ist ein Sehnenviereck perspektiv zu einem Quadrat in seinem Umkreis, so hat es zwei Brocard-Punkte.

Beweis: Die Brennpunkte der gemeinsamen Berührellipse ergeben sich zu

$$B_r\left(\frac{pr^2(p^2+r^2)}{p^4+r^4};\pm\frac{pr^2(p^2-r^2)}{p^4+r^4}\right).$$

Für diese Brennpunkte gilt

$$\angle B_r^+AD = \angle B_r^+BA = \angle B_r^+CB = \angle B_r^+DC = \omega\,,$$

$$\angle B_r^-AB = \angle B_r^-B = \angle B_r^-CA = \angle B_r^-DA = -\omega\,,$$

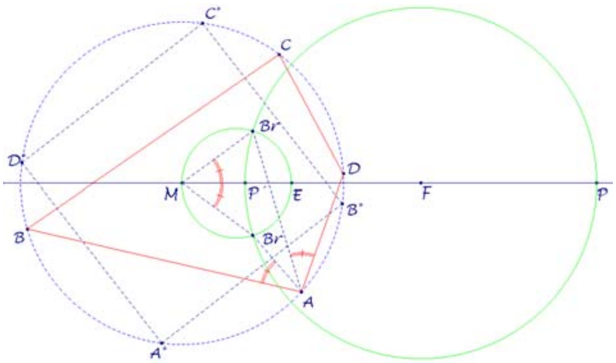
$$\angle EMB_r = \pm\omega\,,$$

sodass sie als Brocard-Punkte des Vierecks angesprochen werden können. Für den Brocard-Winkel ω erhält man

$$\cot\omega = \frac{p^2+r^2}{|p^2-r^2|} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4F} = \frac{r}{\sqrt{-\,pot(E)}}\quad,$$

wobei *pot(E)* die Potenz des Diagonalenschnitts bezeichnet. □
Bei Johnson wird die Existenz dieser Brocard-Punkte unabhängig von ihrer Brennpunkteigenschaft und einer Konstruktionsmöglichkeit angesprochen ([1], S.301).

Satz 5. Die Brocard-Punkte eines quadrat-perspektiven Sehnenvierecks liegen in den Schnittpunkten des Thales-Kreises über der Umkreismitte *M* und dem Diagonalenschnitt *E* (Brocard-Kreis) und dem Thales-Kreis über dem Perspektivzentrum *P* und seinem Spiegelpunkt *P´* am Umkreis.



Beweis: Die Brocard-Punkte liegen auf dem Thales-Kreis über *ME* mit der Gleichung

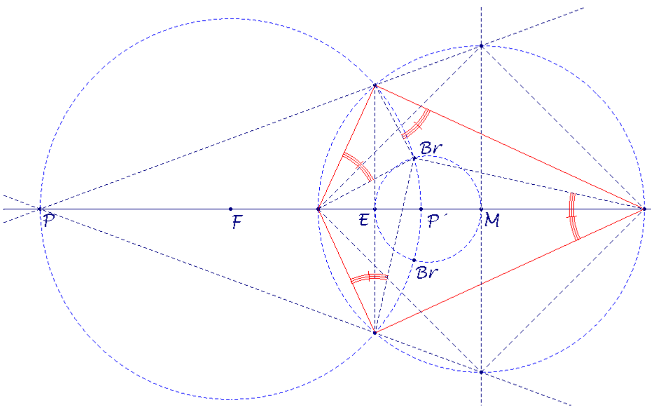
$$(x-\frac{pr^2}{p^2+r^2})^2+y^2=\frac{p^2r^4}{(p^2+r^2)^2},$$

der hier die Rolle des Brocard-Kreises übernimmt, und dem Thales-Kreis über *PP´* mit der Gleichung

$$(x-\frac{p^2+r^2}{2p})^2+y^2=\frac{(p^2-r^2)^2}{4p^2}. \qquad \square$$

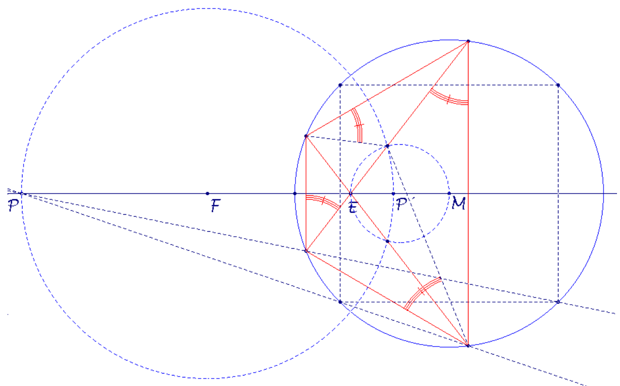
Abschließend seien weitere Zusammenhänge erwähnt: Betrachtet man den Thales-Kreis über *PP´*, der den Umkreis senkrecht schneidet, als Inversionskreis einer Inversion mit der Achse *MP*, so vertauscht diese Inversion nicht nur die Brocard-Punkte, sondern auch die Gegenecken des quadrat-perspektiven Sehnenvierecks als auch die Steiner-Punkte der vollständigen Vierseite zu *ABDC* und *ACBD*, die ebenfalls auf dem Brocard-Kreis liegen.

Zwei Beispiele



Jeder Drachen im Kreis ist ein quadrat-perspektives Sehnenviereck. Hat dieser Drachen die „Spannweite“ *2h*, so errechnen sich die Brocard-Punkte zu

$$B_r(\frac{r^2\sqrt{r^2-h^2}}{r^2+h^2};\pm\frac{hr\sqrt{r^2-h^2}}{r^2+h^2}) \quad mit \quad \cot\omega=\frac{r}{h}.$$



Ein symmetrisches Trapez mit den Parallelen *a* und *c (a > c)* und der Höhe *h* ist nur unter Bedingung

$$a^2 - 6ac + c^2 + 4h^2 = 0$$

ein quadrat-perspektives Sehnenviereck, d.h.

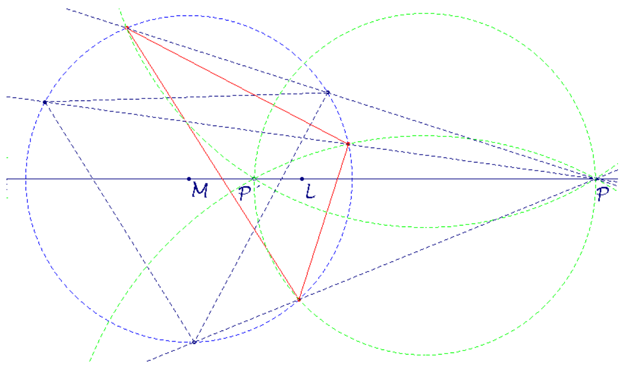
$$h = \frac{ac}{\sqrt{2}r} \quad bzw. \quad pot(E) = -\frac{2a^2c^2}{(a+c)^2}.$$

Die Brocard-Punkte errechnen sich dann zu

$$B_r(\frac{a^2-c^2}{8h};\pm\frac{a-c}{4}) \quad mit \quad \cot\omega = \frac{a+c}{2h}.$$

Damit liegen die Brocard-Punkte auf den Diagonalen und der Brocard-Winkel ist der Anstiegswinkel der Diagonalen.

Rückblick

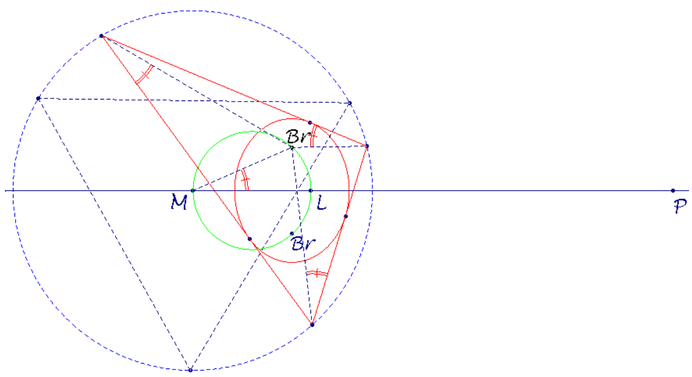


Hier sollen die entsprechenden Zusammenhänge für Dreiecke angesprochen werden. Jedes Dreieck ist perspektives Bild eines gleichseitigen Dreiecks in seinem Umkreis, wenn man als Perspektivzentrum einen der isodynamischen Punkte des Dreiecks wählt. Die isodynamischen Punkte sind die beiden gemeinsamen Punkte der drei Apollonius-Kreise. Sie liegen im Abstand

$$p = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2 \pm 4\sqrt{3}\Delta}{a^2+b^2+c^2 \mp 4\sqrt{3}\Delta}}\, r$$

vom Umkreismittelpunkt M in Richtung des Lemoine-Punktes L, der bei entsprechender Nutzung eines kartesischen Koordinatensystems die folgende Darstellung erhält:

$$L(\frac{2pr^2}{p^2+r^2};0).$$



Die perspektiven Bilder gleichseitiger Dreiecke im Kreis stimmen bei festem Perspektivzentrum in ihren Lemoine-Punkten überein. Dieser gemeinsame Lemoine-Punkt ist der Brianchon-Punkt einer gemeinsamen Berührellipse mit der Gleichung

$$\frac{(x-\frac{3pr^2(p^2+r^2)}{2(p^4+p^2r^2+r^4)})^2}{\frac{r^2(p^2-r^2)^4}{4(p^4+p^2r^2+r^4)^2}}+\frac{y^2}{\frac{r^2(p^2-r^2)^2}{4(p^4+p^2r^2+r^4)}}=1.$$

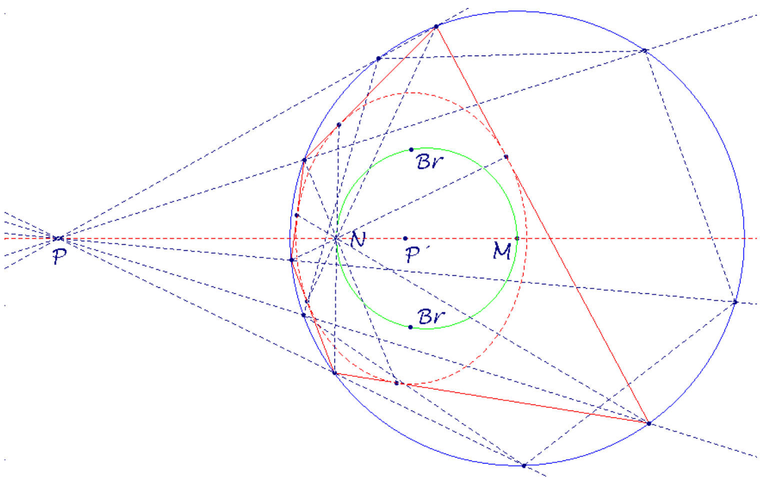
Die Brennpunkte

$$B_r(\frac{3pr^2(p^2+r^2)}{2(p^4+p^2r^2+r^4)};\pm\frac{\sqrt{3}pr^2(p^2-r^2)}{2(p^4+p^2r^2+r^4)})$$

sind die gemeinsamen Brocard-Punkte. Dabei gilt für den Brocard-Winkel

$$\cot\omega=\frac{p^2+r^2}{|p^2-r^2|}\sqrt{3}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}=\frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{-pot(L)}}.$$

Ausblick



Die Zusammenhänge von Satz 4 lassen sich verallgemeinern:

Satz 6. Die perspektiven Bilder von regulären n-Ecken in einem Kreis haben zwei Brocard-Punkte.

Beweis: Betrachtet man verallgemeinernd die perspektiven Bilder von regulären n-Ecken im Kreis, so haben diese einen gemeinsamen Berührkegelschnitt mit der Gleichung:

$$\frac{(x-\frac{2pr^2(p^2+r^2)\sin^2(\pi/n)}{p^4+r^4-2p^2r^2\cos(2\pi/n)})^2}{\frac{r^2(p^2-r^2)^4\cos^2(\pi/n)}{(p^4+r^4-2p^2r^2\cos(2\pi/n))^2}}+\frac{y^2}{\frac{r^2(p^2-r^2)^2\cos^2(\pi/n)}{p^4+r^4-2p^2r^2\cos(2\pi/n)}}=1$$

Die Brennpunkte dieser Berührellipse erweisen sich als Brocard-

Punkte der regulär-perspektiven Sehnen-n-Ecke. Sie errechnen sich zu

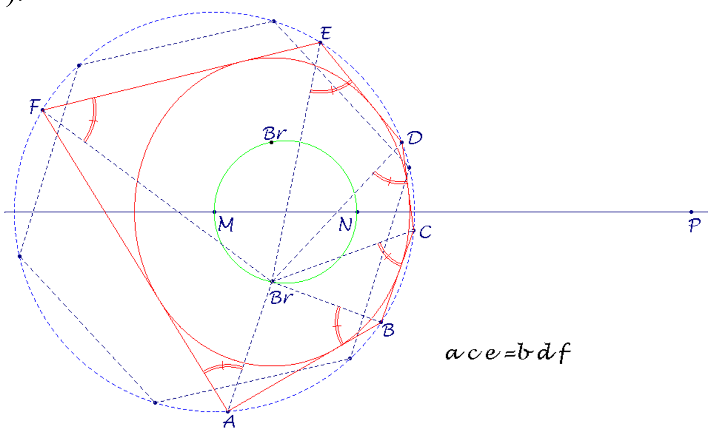
$$B_r\left(\frac{2pr^2(p^2+r^2)\sin^2(\pi/n)}{p^4+r^4-2p^2r^2\cos(2\pi/n)};\pm\frac{pr^2(p^2-r^2)\sin(2\pi/n)}{p^4+r^4-2p^2r^2\cos(2\pi/n)}\right)$$

$$mit \qquad \cot\omega=\frac{(p^2+r^2)\tan(\pi/n)}{|p^2-r^2|}=\frac{r\tan(\pi/n)}{\sqrt{-pot(N)}}.$$

Unabhängig von dem gewählten n ist der zweite Schnitt des Brocard-Kreises mit der Geraden MP immer der Punkt

$$N\left(\frac{2pr^2}{p^2+r^2};0\right).$$

Dieser Punkt teilt mit M die Strecke $PP´$ harmonisch. Bei Dreiecken war es der Lemoine-Punkt, bei Vierecken der Diagonalenschnitt. Für Fünfecke ist es ein gemeinsamer Schnitt der Verbindungsgeraden der Ecken mit dem Berührpunkt der In-Ellipse auf der Gegenseite; für Sechsecke ist es ein gemeinsamer Schnitt der Verbindungsgeraden von Gegenecken. – Hier deuten sich Verallgemeinerungsmöglichkeiten an, die sich weiter verfolgen ließen. So gilt z.B. für regulär-perspektive Sehnen-Sechsecke die Produktgleichheit überspringender Seiten ($a·c·e$ = $b·d·f$).



Literatur

[1] Roger A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. – Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2007.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de